



**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ  
– ETAPA PE SECTOR, 23.02.2014 -**

**CLASA A XII-A  
SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE**

**Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi.  
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.**

Enunț subiect 1, autor\*\*\*

Pentru fiecare  $p \in \mathbb{N}^*$  considerăm mulțimea  $U_p = \{z \in \mathbb{C} \mid z^p = 1\}$ .

- a) Să se arate că există  $\omega \in U_p$  astfel încât  $U_p = \{1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{p-1}\}$ .
- b) Să se arate că, dacă  $m, n \in \mathbb{N}^*$  și mulțimea  $U_m \cup U_n$  este parte stabilă în raport cu înmulțirea numerelor complexe, atunci  $m$  divide  $n$  sau  $n$  divide  $m$ .

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) $U_p = \left\{ \cos \frac{2k\pi}{p} + i \sin \frac{2k\pi}{p} \mid k = 0, 1, 2, \dots, p-1 \right\}$	1p
Cerința se realizează, de exemplu, pentru $\omega_p = \cos \frac{2\pi}{p} + i \sin \frac{2\pi}{p}$	2p
b) Dacă $U_m \cup U_n$ este parte stabilă, atunci $U_m \cup U_n$ conține elementul $\omega_m \omega_n$	1p
În acest caz avem, de exemplu, $\omega_m \omega_n \in U_m$ , deci $\omega_m \omega_n = \omega_m^s, s \in \{1, 2, \dots, m\}$	1p
Rezultă $\omega_n = \omega_m^{s-1}$ , de unde $2\pi/n = 2(s-1)\pi/m$ , adică $m = (s-1)n$ , deci $n \mid m$	2p

Enunț subiect 2, autor\*\*\*

Fie  $(G, \cdot)$  un grup și un subgrup  $H$  al lui  $G$ , cu  $H \neq G$ .

- a) Să se arate că dacă  $x \in H$  și  $y \in G \setminus H$ , atunci  $xy \in G \setminus H$ .
- b) Să se arate că dacă orice două elemente din  $G \setminus H$  comută, atunci grupul  $(G, \cdot)$  este comutativ.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Dacă $xy = z \in H$ atunci, deoarece $x^{-1} \in H$ și $H$ este parte stabilă, $y = x^{-1}z \in H$ – contradicție, deci $xy \notin H$	2p
b) Dacă $x \in H$ și $y \in G \setminus H$ , atunci $y(xy) = (xy)y$ și, prin simplificare cu $y$ , $xy = yx$	2p
Dacă $x \in H$ și $y \in H$ , atunci luăm $z \in G \setminus H$ și obținem $(xz)(yz) = (yz)(xz)$ , deci $xyz^2 = yxz^2$ , de unde $xy = yx$	3p

Enunț subiect 3, autor *Florin Rotaru*

Fie  $0 < a < b$  și  $f : [a, b] \rightarrow (0, +\infty)$  o funcție continuă.

a) Să se arate că pentru fiecare  $n \in \mathbb{N}$  există și este unic numărul  $x_n \in (a, b)$  astfel încât

$$n \int_a^{x_n} f(x) dx = \int_{x_n}^b f(x) dx.$$

b) Dacă  $(x_n)_{n \geq 1}$  este șirul definit la a), să se calculeze  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Dacă $F$ este o primitivă a lui $f$ , atunci cerința este $(n+1)F(x_n) = F(b) + nF(a)$	2p
Funcția $F$ este continuă și strict crescătoare, iar $(n+1)F(a) < F(b) + nF(a) < (n+1)F(b)$ , deci există și este unic $x_n \in (a, b)$ astfel încât $(n+1)F(x_n) = F(b) + nF(a)$ .	2p
b) $\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(b)}{n+1} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nF(a)}{n+1} = F(a)$	1p
Deoarece $F$ este strict crescătoare, relația precedentă implică $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .	2p

Enunț subiect 4, autor \*\*\*

a) Să se arate că  $\sin x \geq x - \frac{x^3}{3}$ , pentru orice  $x \geq 0$ .

b) Fie  $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  o funcție continuă. Să se arate că  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) = \int_0^1 f(x) dx$ .

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Considerăm funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{3}$ . Atunci $f'(x) = \cos x - 1 + x^2/2$ , $f''(x) = x - \sin x \geq 0$ pentru $x \geq 0$ , $f'$ este crescătoare și $f'(0) = 0$ , deci $f'(x) \geq 0$ pentru $x \geq 0$ , de unde $f$ este crescătoare pe $[0, \infty)$ , iar $f(0) = 0$ conduce la concluzie	2p
b) Din $\sin x \leq x$ pentru $x \geq 0$ obținem $s_n = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = t_n$	1p
Cum $f$ este integrabilă, $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \int_0^1 f(x) dx$	1p
Din a), $s_n \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^3} f^3\left(\frac{k}{n}\right) = t_n - \frac{1}{3n^2} u_n$ , cu $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \int_0^1 f^3(x) dx$	2p
Din criteriul cleștelui rezultă concluzia	1p